

$$v_1 = v_0 + a_0 \cdot \Delta t \quad : \quad t_1 = t_0 + \Delta t \quad \text{ثم نحسب } v_1 \text{ عند اللحظة } t_1$$

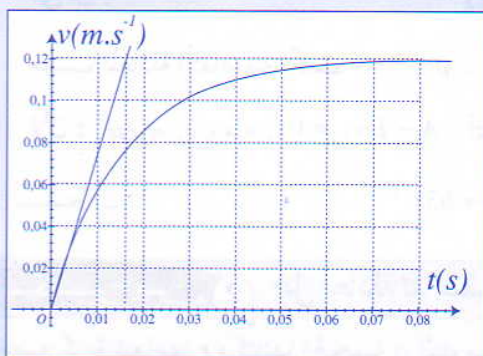
$$a_1 = B - A \cdot v_1 \quad : \quad \text{نحسب } a_1 \text{ عند اللحظة } t_1 \text{ باستعمال المعادلة التفاضلية}$$

$$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t \quad : \quad t_2 = t_1 + \Delta t \quad \text{ثم نحسب } v_2 \text{ عند اللحظة } t_2$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \Delta t \quad \text{و} \quad a_i = B - A v_i \quad \text{بصفة عامة}$$

## تمرين 1 دراسة سقوط رمية في الغليسرين

ندرس الحركة الرأسية، بدون سرعة بدئية ( $v_0 = 0$  عند  $t = 0$ ) لسقوط رمية (قطعة مسطحة كتلتها  $m$  وحجمها  $V_0$ )



في مخبر مدرج يحتوي على الغليسرين ذي الكتلة الحجمية  $\rho_0$ .  
نعتبر أن الرمية تخضع لقوة الاحتكاك المائع المنمذجة بمتجهة  $\vec{f}$  لها نفس اتجاه متجهة السرعة  $\vec{v}$  ومنحاهها معاكس لمنحى الحركة؛ شدتها  $f = K \cdot v$  مع  $K$  ثابتة موجبة.

نحصل على المنحنى جانبه، والذي يمثل تطور السرعة  $v$  بدلالة الزمن.

1- اجرد القوى المطبقة على الرمية خلال سقوطها في الغليسرين، ومثلها على تبيانه دون اعتبار للسلم.

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن حركة مركز قصور الرمية

$$\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v \quad \text{تحقق المعادلة التفاضلية التالية}$$

أعط التعبير الحرفي لكل من  $A$  و  $B$  بدلالة معطيات النص.

3- باستعمال المنحنى  $v(t)$ ، حدد قيمة كل من  $A$  و  $B$ .

## حل

1- ندرس حركة الرمية بالنسبة للمرجع الأرضي الذي يمكن اعتباره غاليليا.

القوى الخارجية المطبقة على الرمية:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{وزن الرمية.}$$

$$\vec{F} = -m_f \cdot \vec{g} \quad \text{دافعة أرخميدس (} m_f \text{ كتلة السائل المزاح)}$$

$$\vec{f} = -K \cdot v \cdot \vec{k} \quad \text{قوة احتكاك المائع.}$$

$$2- \text{ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الرمية نكتب: } m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$$

بما أن الحركة رأسية، نسقط العلاقة المتجهية على المحور ( $oz$ ) الموجه نحو الأسفل.

$$m \cdot a = m \frac{dv}{dt} = mg - F - f \quad \text{إذن:}$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \rho_0 V_0 g - K \cdot v$$

$$m \frac{dv}{dt} = g(m - \rho_0 \cdot V_0) - K \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_0 V_0}{m}\right) - \frac{K}{m} v \quad \text{أو:}$$

$$\text{نحصل على معادلة تفاضلية على شكل: } \frac{dv}{dt} = A - B \cdot v \quad \text{مع } A = g \left(1 - \frac{\rho_0 V_0}{m}\right) \quad \text{و} \quad B = \frac{K}{m}$$

3- حساب A و B

عند  $t = 0$ ، لدينا  $v_0 = 0$ ، ومنه تصير المعادلة التفاضلية كالتالي :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A - B.v_0 = A$$

تساوي A قيمة العامل الموجه لمماس المنحنى  $v(t)$  عند  $t = 0$ .

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A = \frac{0,12 - 0}{0,016 - 0} = 7,5 \text{ m.s}^{-2}$$

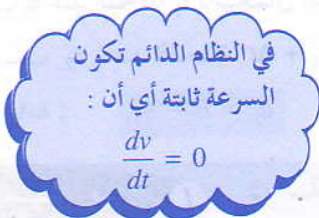
في النظام الدائم تكون السرعة ثابتة

$$v = v_\ell = 0,12 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{أي أن :}$$

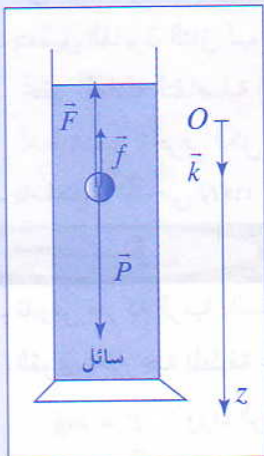
$$\frac{dv_\ell}{dt} = A - B.v_\ell = 0 \quad \text{حسب المعادلة التفاضلية نكتب :}$$

$$A = B.v_\ell \quad \text{لأن : } v_\ell = \text{cte} \quad \text{ومنه : } A - B.v_\ell = 0 \quad \text{أي أن :}$$

$$B = \frac{A}{v_\ell} = \frac{7,5}{0,12} \approx 63 \text{ s}^{-1} \quad \text{نستنتج أن :}$$



تمرين 2 حل معادلة تفاضلية بالطريقة الرقمية لأولير (Euler)



تخضع كرية شعاعها  $r$  وكتلتها الحجمية  $\rho$  أثناء سقوطها الراسي داخل سائل كتلته الحجمية  $\rho_0$

$$\vec{P} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \cdot \vec{k} \quad \text{ولزوجته } \eta \text{ إلى القوى التالية :}$$

$$\vec{F} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g \cdot \vec{k}$$

$$\vec{f} = -6\pi \eta r v \cdot \vec{k}$$

1- بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة تكتب على الشكل التالي :  $(1) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c$

مع تحديد التعبير الحرفي لكل من الثابتين  $\tau$  و  $c$ .

2- عين الوحدات التي يعبر بها عن كل من  $\tau$  و  $c$ . احسب قيمتهما.

$$\rho = 2600 \text{ kg.m}^{-3} \quad \text{و} \quad r = 1 \text{ mm} \quad \text{نعطي :}$$

$$g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1} \quad \eta = 5,00 \text{ Pa.s} \quad , \quad \rho_0 = 970 \text{ kg.m}^{-3}$$

3- حدد التسارع البدئي للكرية والسرعة الحدية  $v_\ell$  التي تصل إليها، علما أن السرعة البدئية للكرية عند  $t = 0$  تكون منعدمة.

4- أنجز حلا تقريبا للمعادلة التفاضلية (1) باستعمال الطريقة الميانية لأولير، باتخاذ خطوة الحساب  $\Delta t = 5.10^{-5} \text{ s}$

5- بينت الدراسة النظرية أن حل هذه المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل :  $v = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

حدد التعبير الحرفي لكل من الثابتين A و B.

حل

1- إثبات المعادلة التفاضلية بالنسبة للسرعة

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} \quad \text{نكتب : على الكرية، معلّم غاليلي،}$$

$$m = \rho \cdot V \quad \text{مع} \quad \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \bar{a} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot g \cdot \bar{k} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g \cdot \bar{k} - 6\pi \eta r \cdot v \cdot \bar{k}$$

$$\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g - 6\pi \eta r \cdot v$$

نسقط هذه العلاقة على المحور Oz

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} \cdot v = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \text{أي أن} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_0}{\rho}g - \frac{9\eta}{2r^2\rho} \cdot v \quad \text{ومنه:}$$

$$c = g(1 - \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \text{و} \quad \tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta} \quad \text{مع} \quad (1) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c \quad \text{أو:}$$

2- حساب c و τ

يجب أن يعبر عن الحدود الثلاثة في المعادلة التفاضلية (I) بنفس الوحدة؛

بما أن  $\frac{dv}{dt}$  معبر عنها بـ  $m \cdot s^{-2}$  فإن c يعبر عنها كذلك بـ  $m \cdot s^{-2}$  و τ بـ s.

حساب قيمتي c و τ:

$$c = 9,81 \cdot (1 - \frac{970}{2600}) = 6,15 m \cdot s^{-1} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{2 \cdot (10^{-3})^2 \cdot 2600}{9 \cdot 5} = 1,156 \cdot 10^{-4} s$$

3- التسارع البدئي والسرعة الحدية للكروية

حسب المعادلة التفاضلية، عند  $t = 0$ ، يكون  $\frac{dv}{dt} + \frac{v_0}{\tau} = c$  مع  $v_0 = 0$

$$a(0) = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = c = 6,15 m \cdot s^{-2} \quad \text{نحصل على:}$$

عندما تصل سرعة الكروية إلى قيمتها الحدية، تكون  $\frac{dv}{dt} = 0$  أي أن  $\frac{v_\ell}{\tau} = c$

$$v_\ell = \tau \cdot c = 1,156 \cdot 10^{-4} \cdot 6,15 = 7,10 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-1} \quad \text{ومنه:}$$

4- إنجاز الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{1,156 \cdot 10^{-4}} \approx 8650 \cdot s^{-1} \quad \text{مع} \quad a = 6,15 - 8650 \cdot v \quad \text{أو} \quad a = \frac{dv}{dt} = c - \frac{v}{\tau} \quad \text{لدينا:}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6,15 - 8650 \cdot v \quad \text{أو بشكل تقريبي يمكن أن نكتب:}$$

$$\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} s \quad \text{مع} \quad \Delta v = 6,15 \cdot \Delta t - 8650 \cdot \Delta t \cdot v \quad \text{ومنه:}$$

$$\Delta v = 3,075 \cdot 10^{-4} - 0,432 \cdot v \quad \text{أو بتعبير آخر:}$$

بين اللحظتين  $t_i$  و  $t_i + \Delta t$ ، تتغير السرعة بالقيمة  $\Delta v = v_{i+1} - v_i$  أي أن:

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i = 3,075 \cdot 10^{-4} - 0,432 \cdot v_i$$

$$v_{i+1} = 3,075 \cdot 10^{-4} + 0,568 \cdot v_i$$

لدينا عند  $t = 0$ ،  $v_0 = 0$  إذن:

$$t_1 = t_0 + \Delta t \quad \text{عند} \quad v_1 = 3,075 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-1}$$

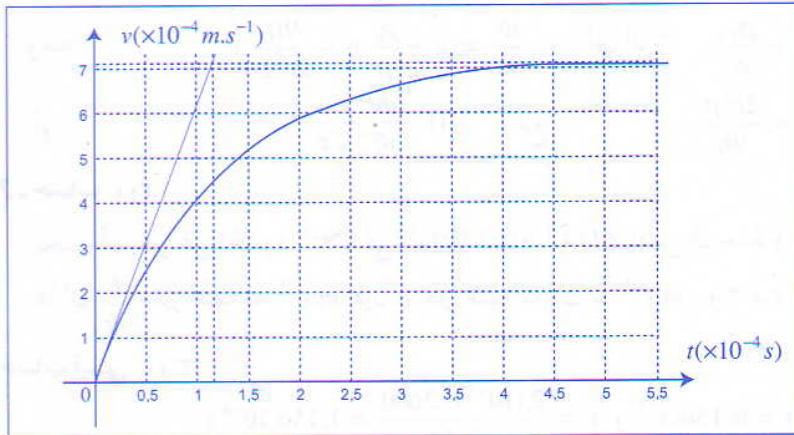
$$t_2 = t_1 + \Delta t \quad \text{عند} \quad v_2 = 3,075 \cdot 10^{-4} + 0,568 \cdot 3,075 \cdot 10^{-4} = 4,82 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-1}$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t \quad \text{عند} \quad v_3 = 3,075 \cdot 10^{-4} + 0,568 \cdot 4,82 \cdot 10^{-4} = 5,81 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-1}$$

وبنفس الطريقة نجد  $v_4$  و  $v_5$  و  $v_6$  و  $v_7$  إلى أن تقترب السرعة من السرعة الحدية  $v_\ell$ .

4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0	$t(10^{-4}s)$
7,06	7,03	6,97	6,87	6,69	6,37	5,81	4,82	3,075	0	$v(10^{-4}m.s^{-1})$

نجمع النتائج المحصلة في الجدول التالي :



نرسم المنحنى  $v = f(t)$ .

5- حل المعادلة التفاضلية نظريا.

لدينا :  $v = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

عند اللحظة  $t = 0$  لدينا،  $v(0) = Ae^{-0} + B = 0$  ومنه  $A = -B$  أي أن :  $v = -Be^{-\frac{t}{\tau}} + B = B(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

نشتق  $v$  بالنسبة للزمن :  $\frac{dv}{dt} = \frac{B}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

نعوض  $v$  و  $\frac{dv}{dt}$  بتعبيروهما في المعادلة التفاضلية  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c$

$$\frac{B}{\tau} = c \text{ ومنه } \frac{B}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{B}{\tau} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = c$$

$$B = \tau \cdot c = v_\ell = 7,10 \cdot 10^{-4} m.s^{-1} \quad \text{إذن :}$$

$$v = v_\ell (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 7,10 \cdot 10^{-4} (1 - e^{-8650 \cdot t}) \quad \text{وبالتالي :}$$

للتأكد من صلاحية النموذج المعتمد لقوة الاحتكاك، نمثل في نفس أنظمة المحورين المنحنى المحصل بطريقة أولير والمنحنى المحصل عن طريق الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية.

### تمرين 3

تكتب المعادلة التفاضلية خلال سقوط كرية في مائع على شكل :  $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v^2$

يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير.

يمثل الجدول التالي مقتطفا من ورقة حساب قيم السرعة  $v$  والتسارع  $a$  بدلالة الزمن  $t$ ، باستعمال القيم التالية لكل من  $A$  و  $B$  وخطوة الحساب  $\Delta t$ .

$$\Delta t = 0,5s \quad B = 1,56 \cdot 10^{-2} m^{-1} \quad \text{و} \quad A = 9,8 m.s^{-2}$$

300	2,50	2,00	1,50	1,00	0,50	0,00	$t(s)$
21,6	$v_5$	17,2	13,8	9,61	4,90	0,00	$v(m.s^{-1})$
2,49	3,69	$a_4$	6,83	8,36	9,43	9,80	$a(m.s^{-2})$

1- أوجد قيمة كل من  $a_4$  و  $v_5$ .

2- عبر عن السرعة الحدية للكروية بدلالة  $A$  و  $B$ . واحسب قيمتها.

## حل

1- معرفة قيمة السرعة  $v_4$  عند اللحظة  $t_4$ ، يمكن حساب التسارع  $a_4$  عند نفس اللحظة.

باستعمال المعادلة التفاضلية:  $a = \frac{dv}{dt} = A - B.v^2$  نجد أن:

$$a_4 = \frac{dv}{dt} = A - B.v_4^2 = 9,8 - 1,56.10^{-2}(17,2)^2 = 5,18m.s^{-2}$$

- لحساب السرعة  $v_5$  عند اللحظة  $t_5$ ، نستعمل العلاقة التقريبية بين اللحظتين  $t_4$  و  $t_5$ .

$$v_5 = a_4 \Delta t + v_4 = 5,18.0,5 + 17,2 = 19,8m.s^{-1} \quad \text{يعني} \quad a_4 = \frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4} \quad \text{ومنه:}$$

2- تعبير السرعة الحدية للكروية

عندما تأخذ السرعة القيمة الحدية  $v_l$  تصبح ثابتة:

$$v_l = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,56.10^{-2}}} = 25,1m.s^{-1} \quad \text{أي أن:} \quad \frac{dv_l}{dt} = A - B.v_l^2 = 0$$

## تمرين موضوعاتي 4 دراسة حركة قطرة المطر في الهواء

تتكون قطرة مطر كتلتها  $m = 15\mu g$ ، انطلقا من السحاب، عند نقطة  $O$  توجد على ارتفاع  $h = 830 m$  من سطح الأرض.

من النقطة  $O$ ، تسقط القطرة عند اللحظة  $t = 0$ ، بدون سرعة بدئية ( $v_0 = 0$ ).  
ندرس حركة القطرة في معلم الفضاء  $(O, \vec{k})$  المرتبط بالمرجع الأرضي ومحوره  $(O, z)$  رأسي وموجه نحو الأسفل.  
نعتبر أن كتلة قطرة المطر تبقى ثابتة خلال مدة السقوط.

1- نهمل دافعة أرخميدس وقوى الاحتكاك المائع، ونأخذ  $g = 9,8m.s^{-2}$ .

احسب سرعة قطرة المطر عند وصولها سطح الأرض.

2- نعتبر قطرة المطر كروية الشكل. قارن قيمة دافعة أرخميدس  $F_A$  المطبقة على قطرة المطر بوزنها  $P$ . ماذا تستنتج؟

$$\rho_e = 10^3 kg.m^{-3} \quad \text{نعطي: - الكتلة الحجمية للماء:}$$

$$\rho_a = 1,21kg.m^{-3} \quad \text{- الكتلة الحجمية للهواء:}$$

3- يعبر عن شدة قوة الاحتكاك المائع، المطبقة على قطرة المطر، بـ  $f = K.v$  مع  $K$  معامل الاحتكاك المائع.

3.1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة القطرة.

3.2- عبر عن السرعة الحدية  $v_l$  للقطرة بدلالة  $m$  و  $g$  و  $K$ .

3.3- احسب معامل الاحتكاك المائع، علما أن قيمة سرعة الكروية عند وصولها سطح الأرض هي:  $v_l = 9,5m.s^{-1}$

3.4- تحقق من أن التعبير  $v(t) = v_l(1 - e^{-\frac{K}{m}t})$ ، حلا للمعادلة التفاضلية المحصلة في السؤال (3.1).

4- أثناء شحن مكثف سعته  $C$  عبر مقاومة  $R$ ، تحت توتر  $E$ ، تكون المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر  $u$  بين مرطبي المكثف

- هي :  $u + R.C. \frac{du}{dt} = E$  ويكون حلها هو :  $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
- 4.1 - أعط تعبير ثابتة الزمن لثنائي القطب  $RC$  واكتب تعبير  $u(t)$  بدلالة  $t$ .
- 4.2 - بمقارنة تعبير  $u(t)$  و  $v(t)$  استنتج ثابتة الزمن بالنسبة لقطرة المطر.
- 4.3 - تحقق من هذه النتيجة باستعمال معادلة الأبعاد.

## حل

1 - سرعة قطرة المطر عند وصولها سطح الأرض

تخضع قطرة المطر لوزنها فقط، وبالتالي فهي في سقوط حر.

تسقط القطرة انطلاقا من النقطة  $O$ ، أصل معلم الفضاء، عند  $t = 0$  بدون سرعة بدئية ومنه :  $v_0 = 0$  و  $z_0 = 0$

- المعادلات الزمنية للحركة في المعلم  $(O, \bar{k})$  :

$$a_z = g, \quad v_z = gt, \quad z = \frac{1}{2}gt^2$$

عندما تصل الكرية سطح الأرض، تكون قد قطعت المسافة  $z = h$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{أي أن} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- سرعة الكرية عند وصولها سطح الأرض هي :

$$v = gt = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 8,830} = 127,5 \text{ m.s}^{-1}$$

مقارنة مقدارين نحسب نسبتهم

2 - مقارنة قيمتي دافعة أرخميدس ووزن القطرة.

$$\frac{p}{F_A} = \frac{mg}{\rho_a \cdot V \cdot g} = \frac{\rho_e V}{\rho_a \cdot V} = \frac{\rho_e}{\rho_a} = \frac{10^3}{1,21} = 826,4$$

نلاحظ أن  $\frac{p}{F_A} \gg 1$ ، إذن، دافعة أرخميدس مهملة أمام وزن قطرة المطر.

3.1/3 - المعادلة التفاضلية للحركة

المجموعة المدروسة : قطرة المطر

القوى الخارجية المطبقة على القطرة

$\bar{P}$  : وزن القطرة.

$\bar{f}$  : قوة الاحتكاك المائع

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب :  $m \cdot \bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{f}$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{g} - K \cdot v \cdot \bar{k} \quad \text{أو}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v \quad \text{ومنه :}$$

3.2 - تعبير السرعة الحدية  $v_\ell$  للقطرة

عندما تصل سرعة القطرة إلى قيمة حدية  $v = v_\ell = \text{cte}$  فإن  $\frac{dv}{dt} = 0$

$$0 = g - \frac{K}{m}v_\ell \quad \text{أي أن} \quad v_\ell = \frac{g \cdot m}{K}$$

للحصول على المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة، نطبق القانون الثاني لنيوتن

3.3 - حساب معامل الاحتكاك

لدينا :  $K = \frac{mg}{v_\ell} = \frac{15 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8}{9,5} = 1,55 \cdot 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}$

للتحقق من أن تعبير  $v(t)$  حل للمعادلة التفاضلية نشق  $v(t)$  ونعوض في المعادلة التفاضلية كلا من  $\frac{dv}{dt}$  و  $v(t)$

3.4 - تعبير المعادلة التفاضلية

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = g$$

$$v = Ae^{-\alpha t} + B$$

يكتب حل هذه المعادلة على شكل :

لدينا عند  $t = 0$  ،  $v(t = 0) = 0 = A + B$  ، ومنه :  $A = -B$

إذن :  $v(t) = A(e^{-\alpha t} - 1)$  و  $\frac{dv}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t}$

نعوض تعبير  $v(t)$  و  $\frac{dv}{dt}$  في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$-A\alpha e^{-\alpha t} + \frac{K}{m}A(e^{-\alpha t} - 1) = g$$

ومنه :  $Ae^{-\alpha t}(\frac{K}{m} - \alpha) = g + \frac{K}{m}A$

تتحقق هذه المعادلة أيا كانت قيمة  $t$  ، إذا كان  $\frac{K}{m} - \alpha = 0$  ، ومنه :  $\alpha = \frac{K}{m}$

نحدد البرامترات بمقارنة حدي المساوية المحصلة

وبالتالي :  $g + \frac{K}{m}A = 0$  ، ومنه :  $A = -\frac{g \cdot m}{K} = -v_\ell$

$$v(t) = v_\ell(1 - e^{-\frac{K}{m}t})$$

إذن ، حل المعادلة التفاضلية هو :

4.1/4 - ثابتة الزمن لشائي القطب RC

يعبر عن  $\tau$  بالعلاقة :  $\tau = RC$

تعبير  $u(t)$  :  $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

4.2 - بمقارنة تعبير  $u(t)$  و  $v(t)$  ؛ نستنتج أن ثابتة الزمن بالنسبة لقطرة المطر هي :  $\tau = \frac{m}{K} = \frac{15 \cdot 10^{-6}}{1,55 \cdot 10^{-5}} \approx 1 \text{ s}$

4.3 - التحقق من النتيجة المحصلة باستعمال معادلة الأبعاد :

$$[f] = [m][a] = [m] \cdot \frac{[v]}{[t]}$$

حسب القانون الثاني لنيوتن :

$$[f] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-1}}{T} = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

لدينا :  $[v] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$  إذن :

$$[K] = \frac{[f]}{[v]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-1}} = M \cdot T^{-1}$$

نعلم أن :  $f = K \cdot v$  ، ومنه :

$$[\tau] = \frac{[m]}{[K]} = \frac{M}{M \cdot T^{-1}} = T$$

إذن ، النسبة  $\tau = \frac{m}{K}$  لها بعد زمني .